Calcul Différentiel

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Courbes de niveau

Equation d'une ellipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equation d'une hyperbole

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Courbe de niveau

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R},\ \text{la courbe de niveau } K \text{ est l'ensemble } C_K = \{(x, y) \in D | f(x, y) = K\}}$$

Dérivées partielles

Dérivée partielle

Si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$ existe et est finie,

On la note $\partial_1 f(a,b)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x} f(a,b)$:

la première dérivée partielle de f en (a,b)

$i^{\text{ème}}$ dérivée partielle

$\forall i,$ si $\partial_i f(a,b)$ existe pour tout $(a,b) \in D$,

La fonction $\partial_i f$ est appelée la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en (a,b)

Fonction $\mathcal{C}^1$

f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si

toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur D

Taylor-Young à l'ordre 1

$\underline{\text{Si } f \text{ est } \mathcal{C}^1}$, $\quad \forall (a,b) \in D$,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) + ||(h,k)||\ \varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Taylor-Young : version matricielle

Si $\forall i \in [\![1, n]\!], f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix}}_{f(a+h)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix}}_{f(a)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_p f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \cdots & \partial_p f_n(a) \end{pmatrix}}_{J_f(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}}_{h} + ||h|| \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(h) \end{pmatrix}}_{\varepsilon(h)}$$

La matrice jacobienne

Si $\forall i \in [\![1, n]\!], f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ admet p dérivées partielles en a,

On note $J_f(a)$ la matrice jacobienne de f en a : $(J_f(a))_{ij} = \partial_j f_i(a)$:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_p f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \cdots & \partial_p f_n(a) \end{pmatrix}$$

La différentielle d'une fonction

Être différentiable

f est différentiable en a si et seulement si

Il existe une application linéaire ℓ_a telle que

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a h + ||h|| \underset{h \to 0}{\varepsilon(h) \longrightarrow 0}$$

La différentielle

Si f est différentiable en a,

$(*)$ ℓ_a est unique, on l'appelle la différentielle de f en a, et on la note

$$\ell_a = \mathrm{d}f(a) : \ell_a(h) = \mathrm{d}f(a) \cdot h$$

$(*)$ Les dérivées partielles de f en a existent et

$$\forall h \in E, \mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$$

Différentiabilité, continuité et dérivabilité

f est différentiable en a $\Longrightarrow$ f est continue en a

$\Downarrow \not\Uparrow$

f possède des dérivées partielles en a $\not\Longrightarrow$ f est continue en a

f est $\mathcal{C}^1$ sur U $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f est différentiable sur U

f est $\mathcal{C}^1$ sur U $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ \mathrm{d}f \text{ est continue sur } U \end{cases}$

Le gradient

Gradient

Si f est différentiable sur I, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou grad$f(a)$ tel que

$$\forall h \in E, \mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle h | \nabla f(a) \rangle$$

Si $(e_1 ... e_p)$ est une base de E, $\quad \nabla f(a) = \partial_1 f(a) e_1 + ... + \partial_p f(a) e_p$

Règle de la chaîne

Si $f : U \to I$ et $g : t \mapsto (x(t), y(t))$ sont différentiables,

$f \circ g$ est différentiable et$\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) &= x'(t) \tfrac{\partial f}{\partial x}(g(t)) + y'(t) \tfrac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \\ &= \mathrm{d}f(g(t)) \cdot g'(t) \end{aligned}$$

Vecteur tangent à une partie

v est tangent à $C \subset E$ en $a \in C$ si et seulement si

$$\begin{cases} \text{Il existe une application dérivable } M : I \to E \text{ tq } M(I) \subset C \\ \exists t_0 \in I \text{ tq } M(t_0) = a \text{ et } M'(t_0) = v \end{cases}$$

$T_a C$ est l'ensemble des vecteurs tangents à C en a

$$v \perp C \iff v \perp T_a C$$

Orthogonalité du gradient aux courbes de niveau

Si f est $\mathcal{C}^1$ et $\nabla f(a) \neq 0$, où $a \in C$ et f est constante sur C,

$v \in E$ est tangent à C si et seulement si $v \perp \nabla f(a)$

Autrement dit : $T_a C$ est l'hyperplan $[\mathrm{Vect} \nabla f(a)]^{\perp} = \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}f(a)$

$\nabla f(a)$ et $T_a C$

$\boxed{\nabla f(a) \text{ est donc orthogonal à } C : \nabla f(a) \perp T_a C}$

On a donc :

Le champ électrostatique est orthogonal aux équipotentielles.

La ligne de plus forte pente est perpendiculaire à la ligne de niveau...

Connexité, convexité

Partie convexe d'un espace vectoriel

Penser à l'interpolation linéaire.

$D \subset E$ est convexe si et seulement si

$\forall (a,b) \in D^2, \forall t \in [0,1], (1-t)a + tb \in D$

Partie connexe d'un espace vectoriel

$D \subset E$ est connexe par arcs si et seulement si

$\forall (a,b) \in D^2, \exists M : [0,1] \to E$ continue telle que

$M(0) = a$ et $M(1) = b$ et $\forall t \in [0,1], M(t) \in D$

Segment

Le segment $[a,b]$ est l'ensemble des vecteurs

$(1-t)a + tb$ où $t \in [0,1]$

Donc D est convexe $\iff \forall (a,b) \in D^2, [a,b] \subset D$

Connexité et continuité

L'image directe d'une partie connexe par arcs de E

par une application continue $f : E \to F$

est connexe par arcs dans F

Si $f :$ est $\mathcal{C}^1$ sur un convexe D,

f est constante sur D $\iff \nabla f(a) = 0$ pour tout $a \in D$

Idem si D est connexe par arcs

Différentielle d'une composée

On a trois espaces vectoriels normés E, F et G et deux ouverts $U \subset E$ et $V \subset F$.
On a deux applications $f : U \to F$ et $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$:

$$\begin{array}{llllll} U \subset E & \to & V \subset F & \to & G \\ x & \mapsto & y = f(x) & \mapsto & g(y) = (g \circ f)(x) \end{array}$$

Différentielle de la composée

Si f est différentiable en $a \in U$ et g est différentiable en $b = f(a)$,

alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$

Jacobienne de la composée

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(b) \cdot J_f(a)$$

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \frac{\partial (g \circ f)(a)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \partial_j (g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^{q} \partial_i g(b) \partial_j f(a)$$

Dérivées secondes

Dérivées secondes

En prenant D un ouvert de E, $f : \begin{array}{lcl} D & \to & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{array}$

Si $\partial_i f$ existe et possède une j-ème dérivée partielle $\partial_j(\partial_i f)$,

alors $\partial_j(\partial_i f)$ est une dérivée seconde de f, notée $\partial_j \partial_i f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

f est $\mathcal{C}^2$ sur $D \iff$ les p^2 dérivées secondes existent et sont continues sur D

Théorème de Schwarz

Si f est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $D \subset E$, alors

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \forall a \in D, \partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$

Taylor-Young à l'ordre 2

Si f est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $D \subset E$, alors, $\forall a = (a_1, \dots, a_p) \in D$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \partial_i \partial_j f(a) + ||h||^2 \underset{h \to 0}{\underbrace{\varepsilon(h)}_{\longrightarrow 0}}$$

La matrice hessienne

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_p f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_p \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_p \partial_p f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$$

Théorème de Schwarz et matrice hessienne

Si f est $\mathcal{C}^2$, alors $H_f(a)$ est symétrique

En dimension 2 :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right] + (h^2+k^2) \underset{h,k \to (0,0)}{\varepsilon(h,k) \longrightarrow 0}$$

ou avec la hessienne :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(a) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2) \underset{h,k \to (0,0)}{\varepsilon(h,k) \longrightarrow 0}$$

Optimisation

Minimum global

Soit $a \in D$

f possède un minimum global sur D ssi

$\forall x \in D, f(x) \geq f(a)$

Minimum local

Soit $a \in D$

f possède un minimum local en a ssi

$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in D, ||x - a|| < \varepsilon \implies f(x) \geq f(a)$

Maximum global

Soit $a \in D$

f possède un maximum global sur D ssi

$\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$

Maximum local

Soit $a \in D$

f possède un maximum local en a ssi

$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in D, ||x - a|| < \varepsilon \implies f(x) \leq f(a)$

Fonction continue sur un fermé

Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes

Point critique

Soit un point a intérieur à D et f différentiable en a

a est un point critique de f ssi $\nabla f(a) = 0$

f possède un extremum local en a $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ a est un point critique de f

Conditions nécessaire et suffisante d'un extremum local

Soit un point a intérieur à un ouvert D et f de classe $\mathcal{C}^2$

On note (λ_1, λ_2) les valeurs propres de $H_f(a)$

Si f possède un extremum local en a alors $\begin{cases} \nabla f(a) = 0 \\ \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \boxed{\geq} 0 \end{cases}$

Si $\nabla f(a) = 0$ et $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \boxed{>} 0$ alors f possède un extremum local en a

Théorème des extrema liés

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ de E vers $\mathbb{R}$

Si f est constante sur $C \subset E$ et que $g|_C$ admet un extremum local en x

Si x n'est pas un point critique de f alors

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla g(x) = \lambda \nabla f(x)$